# Devoir sur Table 3

# Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.

## Exercice 1

*(E3A PC 2021)*

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel $N$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}-\int_0^1\frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x.$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel $N$, $\displaystyle\left|\int_0^1\frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2N+3}.$

   (c) En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$
3. (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$

   (b) Calculer $\varphi(1)$.
4. (a) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel $N$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}=\frac{1-(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}.$

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\frac{(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$

   (d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)=\int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

   (e) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

## Exercice 2

*(adapté de EML 1998)*

Dans cet exercice, $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.

1. (a) Montrer que, pour tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Pour tout entier naturel $k$, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   Déterminer une relation entre $I_k$ et $I_{k+1}$.
   (c) En déduire que, pour tout $k \geqslant 0$, $I_k = k!$.

   On considère l'application notée $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt$$
2. (a) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $E_n$.
   (b) Pour tout couple $(i,j)$ d'entiers naturels inférieurs ou égaux à $n$, calculer $\left\langle X^i, X^j\right\rangle$.

   Dans la suite du problème, $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de ce produit scalaire.
3. (a) On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X - 1$ et $Q_2 = X^2 - 4X + 2$. Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer le projeté orthogonal de $X^2$ sur $\mathbb{R}_1[X]$
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - ut - v)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

## Exercice 3

*(d'après EPITA 2017)*

Dans tout ce problème, on désigne par $\alpha$ un nombre réel **positif**, et on se propose d'étudier la fonction $f$ définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :
$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$
On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis, dans la partie II, on calcule $f(1)$.

### *Partie I — Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.*

On va étudier la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :
$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

1. (a) Donner un équivalent de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand $t$ tend vers 0.
   (b) En déduire pour quelles valeurs du réel $\alpha$ positif l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.
2. (a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.
   (b) Vérifier que la fonction $t \longmapsto |\sin(t)|$ est $\pi$-périodique, et en déduire, pour tout entier $k$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t$.
   (c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $k \geqslant 1$ :
$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$
   En déduire que, pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 2$,
$$\frac{2}{\pi^\alpha}\int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\left(1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t\right).$$

(d) Déterminer les valeurs du réel $\alpha$ telles que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3. (a) Étudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.

(b) Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geqslant \pi$ :

$$\int_{\pi}^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}} \mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^{\alpha}} - \frac{\cos(x)}{x^{\alpha}} - \alpha \int_{\pi}^{x} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t.$$

(c) Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

(d) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4. Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.
En déduire le domaine de définition de la fonction $f$ introduite dans le préambule.

## *Partie II — Calcul de l'intégrale $f(1)$*

1. (a) Justifier pour tout entier naturel $n$ l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t.$$

(b) Préciser la valeur de $I_0$ et prouver que l'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale $I_n$.

(c) On considère la fonction auxiliaire $\psi$ définie pour $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.

Quelle est la limite $L$ de $\psi(t)$ lorsque $t$ tend vers $0$ ?

On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que $\varphi$ est ainsi définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel $n$ :

$$\int_{0}^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_{0}^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u.$$

2. On considère une fonction $g$ de classe $\mathscr{C}^1$ du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.
À tout entier naturel $n$, on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_{0}^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_{0}^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t) \mathrm{d}t.$$

(b) À l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

(c) Après avoir montré soigneusement que la fonction continue $\psi$ introduite à la question 1.*c*) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire la valeur de $f(1)$.

## Exercice 4
*(d'après Oral CCINP MP)*

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau $A$, $B$ et $C$.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $A_n$ l'événement « l'animal est en $A$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note $B_n$ l'événement « l'animal est en $B$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note $C_n$ l'événement « l'animal est en $C$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $a_n + b_n + c_n$ ?
   (b) Exprimer, en le justifiant, $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
   (c) Exprimer, de même, $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer $P^{-1}$
   (b) Calculer $P^{-1}AP$
   (c) En déduire une expression de $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction $n$.

# Corrigé

## Corrigé de l'exercice 1

1. On va exploiter le théorème des séries alternées

   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1} < 0$

   — La suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   — La suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

   Ainsi, d'après le théorème des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge.}}$

2. (a) Soit $N \in \mathbb{N}$,
   Comme on a affaire à une somme d'un nombre fini de terme on peut échanger intégrale et somme, ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)\frac{1-x^{2(N+1)}}{1-x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N} \qquad \sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x}$$

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}$, alors, pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 x^{2(N+1)}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left[\frac{x^{2N+3}}{2N+3}\right]_0^1 \\
&\leqslant \frac{1}{2N+3}
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \left|\int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2N+3}}$$

   (c) Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{2n} - x^{2n+1}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \qquad\qquad = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2}\end{aligned}$$

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{2N+2}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = S_{2N+2}$$

D'après la question 2.$(a)$ on a alors

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_{2N+2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(2) - -\int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x}\mathrm{d}x$$

La question 2.$(b)$ nous assure alors que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_{2N} = \ln(2)$

De plus, pour $N \in \mathbb{N}$ on a $S_{2N+1} = S_{2N} + \dfrac{1}{2N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Puisque les sous-suites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ln(2)$ on en déduit alors que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \ln(2)$

C'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$.

3. (a) Si $|x| > 1$ alors, par croissances comparées $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

   Si $|x| < 1$ alors, pour $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right| \leqslant |x|^n$.

   Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}|x|^n$ converge donc, par majoration la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ est absolument convergente donc convergente.

   La question 1. nous assure que $\varphi$ est définie en 1.

   Enfin $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann.

   Finalement $\boxed{\varphi \text{ est définie sur } ]-1,1].}$

   (b) Il suffit de reprendre le résultat de la question 2.$(c)$ :

$$\boxed{\varphi(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$$

4. (a) On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$$

(b) Il s'agit simplement d'une somme géométrique de raison $x^2$

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{N}(-x^2)^n = \frac{1-(-x^2)^{(N+1)}}{1-(-x^2)} = \frac{1-(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}$$

On a donc bien $\boxed{\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n} = \frac{1-(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}}$.

(c) On reprend la même méthode que celle utilisée à la question 2.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 x^{2(N+1)}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2N+3}
\end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0}$.

(d) Soit $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)\frac{1-(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{(1-x)(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 (1-x)\frac{(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^1 \left|(1-x)\frac{(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 x^{2(N+1)}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2N+3}
\end{aligned}$$

D'où $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{(1-x)(-x^2)^{(N+1)}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$.

Ainsi $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

En d'autres termes $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) \text{ converge}}$ et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x}$$

(e) Soit $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(2n+2)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\end{aligned}$$

La question précédente nous assure alors que $\boxed{\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \text{ converge}}$ et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4}-\frac{\ln(2)}{2}}$$

---

## Corrigé de l'exercice 2

### *Partie I — Étude d'un produit scalaire*

1. (a) Il est clair que l'intégrale converge pour $P = 0$.

Soit $P \neq 0$ un polynôme de degré $d \geqslant 0$ la fonction $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, notre intégrale n'est donc impropre qu'en $+\infty$.

Par croissances comparées on a $t^2|P(t)\mathrm{e}^{-t}| \sim t^{d+2}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $|P(t)\mathrm{e}^{-t}| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est un intégrale de Riemann convergente.

Donc, d'après le théorème de comparaison pour les fonctions continues et positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|P(t)\mathrm{e}^{-t}|\,\mathrm{d}t$ converge. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est ainsi absolument convergente donc convergente

Finalement $\boxed{\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X]\text{, l'intégrale } \int_0^{+\infty}P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$

(b) On va effectuer une intégration par parties dans $I_{k+1}$ en prenant, pour $t \geqslant 0$,

$$u(t) = t^{k+1}, \qquad v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$$

$u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et on a, pour $t \geqslant 0$,

$$u'(t) = (k+1)\,t^k \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

De plus $\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. L'intégration par parties est donc licite.

Alors

$$\begin{aligned}I_{k+1} &= \lim_{t\to+\infty} -t^{k+1}\mathrm{e}^{-t} - \lim_{t\to 0} -t^{k+1}\mathrm{e}^{-t} - \int_0^{+\infty}(k+1)\,t^k \times -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + (k+1)\int_0^{+\infty}t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= (k+1)I_k\end{aligned}$$

**Remarque**

Pensez bien à vérifier que les fonctions $u$ et $v$ que vous allez faire intervenir sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ de sorte que toutes les intégrales considérées aient bien un sens

Ainsi on obtient
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_{k+1} = (k+1)\, I_k}$$

On va montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$

<u>Initialisation :</u>

Pour $k = 0$ on a
$$\forall A > 0, \qquad \int_0^A \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-A}$$

D'où
$$I_0 = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 = 0!$$

<u>Hérédité :</u>

Soit $k \in \mathbb{N}$ on suppose que $I_k = k!$.

on a alors
$$I_{k+1} = (k+1)I_k = (k+1)timesk! = (k+1)!$$

Ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

Finalement
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_k = k!}$$

2. (a) Remarquons d'abord que, si $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ alors $PQ \in \mathbb{R}[X]$ et donc, d'après la question 1., $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

— Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on a
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle$$
Ainsi l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est symétrique.

— Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}\langle \lambda P + Q, R\rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle.\end{aligned}$$
Ainsi l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est linéaire à gauche. Puisqu'elle est symétrique, elle est également linéaire à droite et donc bilinéaire symétrique.

— Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors la fonction $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, donc par croissance de l'intégrale,
$$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,dt \geqslant 0$$
L'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est donc une forme bilinéaire symétrique positive.

— Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$.

Alors la fonction $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction continue et positive d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}_+$, elle est donc nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Or, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$, on en déduit que, pour tout $t \geqslant 0$, $P(t)^2 = 0$ et donc $P(t) = 0$.

Alors $P$ possède une infinité de racines : tous les nombres positifs. $P$ est donc nécessairement le polynôme nul.

Finalement $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$

(b) Soit $(i,j)$ de $\mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\langle X^i, X^j\rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = I_{i+j} = (i+j)!}$$

(a) On a

$$\langle Q_0, Q_1\rangle = \langle 1, X\rangle - \langle 1, 1\rangle = 1! - 0! = 1 - 1 = 0$$

et

$$\langle X^2 - 4X + 2, Q_0\rangle = \langle X^2, 1\rangle - 4\langle X, 1\rangle + 2\langle 1, 1\rangle = 2 - 4\times 1 + 2 = 0$$

Enfin

$$\begin{aligned}\langle X^2 - 4X + 2, Q_1\rangle &= \langle X^2 - 4X + 2, X\rangle - \langle X^2 - 4X + 2, 1\rangle \\ &= \langle X^2 - 4X + 2, X\rangle \\ &= \langle X^2, X\rangle - 4\langle X, X\rangle + 2\langle 1, X\rangle \\ &= 6 4\times 2 + 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$(Q_0, Q_1, Q_2)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ ne contenant pas le polynôme nul, elle est donc libre. On a de plus $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \text{Card}\,(Q_0, Q_1, Q_2)$.

Ainsi $\boxed{(Q_0, Q_1, Q_2) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_2[X].}$

(b) La famille $(Q_0, Q_1)$ est une base orthogonale de $R_1[X]$ donc la famille $\left(\dfrac{Q_0}{\|Q_0\|}, \dfrac{Q_1}{\|Q_1\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

Le projeté orthogonal de $X^2$ sur $\mathbb{R}_1[X]$ est alors

$$\langle X^2, \frac{Q_0}{\|Q_0\|}\rangle\frac{Q_0}{\|Q_0\|} + \langle X^2, \frac{Q_1}{\|Q_1\|}\rangle\frac{Q_1}{\|Q_1\|}$$

Or

$$\|Q_0\|^2 = \langle X_0, X_0\rangle = 0! = 1$$

$$\langle Q_1, Q_1\rangle = \langle 1 - X, 1 - X\rangle = (\langle 1, 1\rangle - 2\,\langle 1, X\rangle + \langle X, X\rangle) = (1 - 2 + 2) = 1$$

Ainsi le projeté orthogonal de $X^2$ sur $\mathbb{R}_1[X]$ est

$$\begin{aligned}p_{R_1[X]}(X^2) &= \langle X^2, Q_0\rangle Q_0 + \langle X^2, Q_1\rangle Q_1 \\ &= \langle X^2, 1\rangle 1 + \langle X^2, X - 1\rangle(X - 1) \\ &= 2! \times 1 + (3! - 2!) \times (X - 1) \\ &= 2 + 4(X - 1) \\ &= 4X - 2\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } X^2 \text{ sur } \mathbb{R}_1[X] \text{ est } 4X - 2.}$

(c) On a $\displaystyle\inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}(t^2 - ut - v)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]}\|X^2 - P\|^2 = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

On sait que cette distance est réalisé par le projeté orthogonal de $X^2$ sur $\mathbb{R}_1[X]$, ainsi

$$\inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}(t^2 - ut - v)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \|X^2 - p_{R_1[X]}(X^2)\|^2$$

Puisque $X^2 - p_{R_1[X]}(X^2)$ et $p_{R_1[X]}(X^2)$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore nous assure que $\|X^2\|^2 = \|X^2 - p_{R_1[X]}(X^2)\|^2 + \|p_{R_1[X]}(X^2)\|^2$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\|X^2 - p_{R_1[X]}(X^2)\|^2 &= \|X^2\|^2 - \|p_{R_1[X]}(X^2)\|^2\\ &= \langle X^2, X^2\rangle - \langle 4X-2, 4X-2\rangle\\ &= 4! - (16\langle X,X\rangle - 16\langle X,1\rangle + 4\langle 1,1\rangle) \quad = 24 - (16\times 2 - 16\times 1 + 4\times 1)\\ &= 24-20\\ &= 4\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2-ut-v)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 4}$.

## Corrigé de l'exercice 3

### *Partie I — Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.*

1. *Étude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*

   (a) Rappelons que $\sin(t) equit \to 0^+ t$. Donc $\boxed{\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}}$.

   (b) • La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,\pi]$.

   • D'après la question précédente, $\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$.

   • La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ c'est-à-dire $\alpha < 2$.

   Donc par critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\boxed{\int_0^\pi \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha < 2.}$

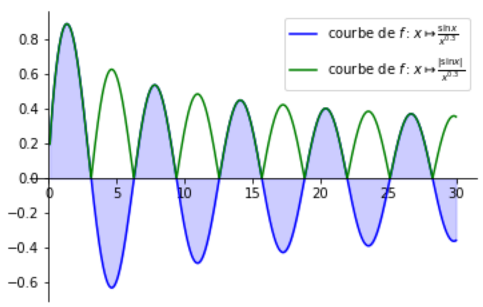
2. *Étude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

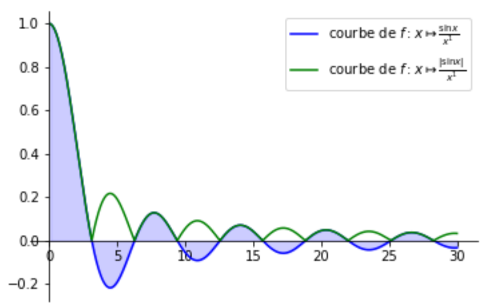
   (a) • La fonction $t \longmapsto \left|\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|$ est continue sur $[\pi,+\infty[$.

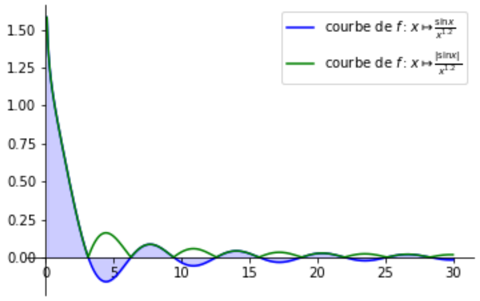
   • $\forall t \in [\pi,+\infty[, \left|\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$.

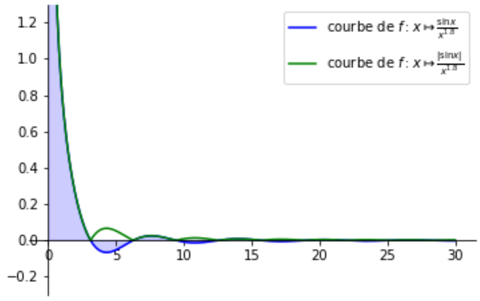
   • La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\pi,+\infty[$ pour $\alpha > 1$.

   Donc par critère de comparaison, $\boxed{t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} \text{ est intégrable sur } [\pi,+\infty[.}$






(b) ⋄ Soit $t$ un réel.

$|\sin(t+\pi)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)|$. $\boxed{\text{Donc la fonction } t \longmapsto |\sin(t)| \text{ est } \pi\text{-périodique.}}$

⋄ Soit $k$ un entier.

Par périodicité de la fonction à intégrer, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\pi} = 2$. $\boxed{\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = 2.}$

(c) Soit $\alpha$ un réel positif.

⋄ Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons que $\forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $\dfrac{|\sin(t)|}{((k+1)\pi)^\alpha} \leqslant \left|\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{|\sin(t)|}{(k\pi)^\alpha}$.

En intégrant sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{((k+1)\pi)^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k\pi)^\alpha}\mathrm{d}t$. Donc d'après la question précédente,

$$\boxed{\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.}$$

⋄ En sommant sur $k$ de 1 à $n-1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}$$

Par la relation de Chasles et un changement d'indice dans la première somme ($\ell = k+1$)

$$\sum_{\ell=2}^{n} \frac{2}{(\ell)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}$$

Donc $\displaystyle\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$.

Or $\alpha \geqslant 0$. Donc $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ pour tout entier $k$ non nul.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

En sommant les inégalités de gauche de 1 à $n-2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

Et en sommant les inégalités de droite de 2 à $n$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Alors $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \frac{2}{\pi^\alpha}\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\left(1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\right).}$$

(d) Rappelons que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
D'après le théorème fondamental de convergence des intégrales de fonctions positives ($t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est positive), si $\alpha > 1$ la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est majorée et si $\alpha \leqslant 1$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

- si $\alpha > 1$.
  Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{|\sin(t)|}{t^\alpha}$ est continue et positive, $\forall x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_\pi^x \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ où $n \geqslant \dfrac{x}{\pi}$.
  D'après la question précédente, $\forall x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_\pi^x \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\left(1+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\right)$.
  Donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.
- si $\alpha \leqslant 1$.
  Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{|\sin(t)|}{t^\alpha}$ est continue et positive, $\forall x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_\pi^{x}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ où $n \leqslant \dfrac{x}{\pi}$.
  D'après la question précédente, $\forall x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\frac{2}{\pi^\alpha}\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \int_\pi^x \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.
  Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = +\infty$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_\pi^x\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t = +\infty$. Donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ diverge.

$\boxed{\text{Ainsi } J(\alpha) \text{ est absolument convergente si et seulement si } \alpha > 1.}$

3. *Étude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

(a) Pour tout réel $x$ supérieur à $\pi$, $\displaystyle\int_\pi^x \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos t]_\pi^x = -\cos x - 1$.
Or la fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$.
Donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_\pi^x \sin(t)\mathrm{d}t$ n'admet pas de limite en $+\infty$. $\boxed{\text{Ainsi par définition, } J(0) \text{ diverge.}}$

(b) Soit $x$ un réel de $[\pi, +\infty[$.
Les fonctions $t \longmapsto -\cos t$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\pi, x]$.
Donc par intégration par parties,

$$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[-\cos(t)\frac{1}{t^\alpha}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \alpha\cos t\frac{1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in [\pi, x],\ \int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha\int_\pi^x\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.}$$

(c) ⋄ Pour tout réel $x$ supérieur à $\pi$, $\displaystyle\int_\pi^x \frac{1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{\alpha t^\alpha}\right]_\pi^x = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha}\right)$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_\pi^x\frac{1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha\pi^\alpha}$. $\boxed{\text{Ainsi l'intégrale } \displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{\alpha\pi^\alpha}.}$

⋄

- La fonction $t \longmapsto \left|\dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right|$ est continue et positive sur $[\pi, +\infty[$.
- $\forall t \in [\pi, +\infty[$, $\left|\dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ car $\alpha + 1 > 1$.

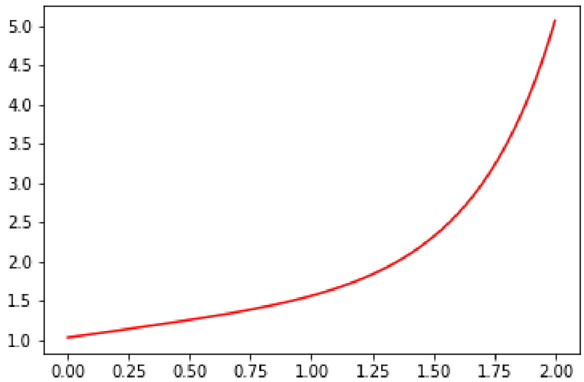
$\boxed{\text{Donc } \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t \text{ converge absolument pour } \alpha > 0.}$

(d) D'après la question précédente, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t$ converge donc $x \longmapsto \displaystyle\int_\pi^{x} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$.
Et $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x^\alpha}$ admet une limite null en $+\infty$ car la fonction cosinus est bornée et $\alpha > 0$.
Donc d'après l'égalité obtenue à la question 3b, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_\pi^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}} \mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$. $\boxed{\text{Ainsi pour } \alpha > 0, \text{ l'intégrale } \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}} \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

4. *Domaine de définition de la fonction $f$*

◇ D'après la question 1b, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}} \mathrm{d}t$ converge et même absolument (car la fonction à intégrer est positive) si et seulement si $\alpha < 2$.
Et d'après la question 2d, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}} \mathrm{d}t$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.
Enfin d'après la question 3d, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
$\boxed{\text{Donc l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}} \mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } 0 < \alpha < 2}$ et $\boxed{\text{elle converge absolument si et seulement si } 1 < \alpha < 2.}$

◇ Ainsi $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } ]0, 2[.}$




## Partie II — Calcul de l'intégrale $f(1)$

1. *Calcul d'intégrales auxiliaires*

(a) • La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• $\dfrac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} 2n+1$. Donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}$ admet une limite en 0.

$\boxed{\text{Ainsi la fonction } t \longmapsto \dfrac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} \text{ est intégrable sur } \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right].}$

(b) ◇ $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

◇ Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

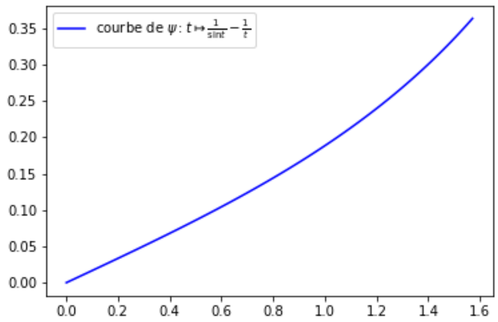
$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big) - \sin\big((2n-1)t\big)}{\sin(t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\big(t\big)\cos\big(2nt\big)}{\sin(t)}\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\pi/2} \qquad \text{car } n \neq 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n - I_{n-1} = 0.}$$

◇ $\boxed{\text{Ainsi pour tout entier } n,\ I_n = \frac{\pi}{2}.}$

(c) Remarquons que $\psi(t) = \dfrac{t - \sin(t)}{t\sin(t)}$.

Or $t - \sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{6}$ et $t\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$. Donc $\psi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{6}$. $\boxed{\text{Ainsi } \lim_{t\to 0} \psi(t) = 0.}$




(d)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\mathrm{d}t \qquad \text{car ces intégrales convergent} \\ &= I_n - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{(2n+1)t}(2n+1)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par le changement de variable affine $u = (2n+1)t$, on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{(2n+1)t}(2n+1)\mathrm{d}t = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin\big(u\big)}{u}\mathrm{d}u$$

Donc

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin\big(u\big)}{u}\mathrm{d}u}$$

2. *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$

(a) Les fonctions $t \longmapsto -\dfrac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Donc par intégration par parties,
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \left[-g(t)\frac{cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} g'(t)\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\mathrm{d}t.$

Or $\cos\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. $\boxed{\text{Donc } u_n = \dfrac{g(0)}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t.}$

(b) $g'$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $g'$ est bornée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Et $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\cos\big((2n+1)t\big)\right| \leqslant 1$.
Donc $\left|\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} |g'(t)|\left|\cos\big((2n+1)t\big)\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\|g'\|_{\infty,[0,\pi/2]}$.
Alors $|u_n| \leqslant \left|\frac{g(0)}{2n+1}\right| + \frac{1}{2n+1}\left|\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2n+1}\left(|g(0)| + \frac{\pi}{2}\|g'\|_{\infty,[0,\pi/2]}\right)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(|g(0)| + \frac{\pi}{2}\|g'\|_{\infty,[0,\pi/2]}\right) = 0$. $\boxed{\text{Donc par encadrement, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(c) ◇ $\psi$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme et quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
Or $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\psi(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}} - 1\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right)} - 1\right)$.
Or $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \underset{u\to0}{o}(u)$ et $\frac{\sin(t)}{t} = 1 - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to0}{o}\left(t^2\right)$.
Donc $\frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to0}{o}\left(t^2\right)$.
Ainsi $\psi(t) = \frac{t}{2} + \underset{t\to0}{o}\left(t^2\right)$.
Donc $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0. Finalement $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

◇ D'après la question précédente et comme $\psi$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0.$$

Or d'après la question 1d, $\int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$.
Donc en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{Ainsi } f(1) = \frac{\pi}{2}.}$

---

## Corrigé de l'exercice 4

1. (a) $(A_n, B_n, C_n)$ est un système complet d'événements, ainsi $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1$, d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n + b_n + c_n = 1}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $(A_n, B_n, C_n)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) +_p (A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$$

Ainsi $a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$, c'est-à-dire $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.}$

(c) De même, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n}$$

2. (a) On va utiliser la méthode de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

À ce stade on peut affirmer que $P$ est de rang 3, comme $P$ est une matrice carrée de taille 3 elle est donc inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) L_2 \leftarrow -L_2$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Ainsi $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

(b) Par le calcul on a

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(c) Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Par une récurrence simple on a, pour $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$.

C'est-à-dire

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3 \times 2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Récurrence « simple »**

On n'acceptera que vous ne rédigiez pas une récurrence simple si : vous avez déjà rédigé une récurrence plus tôt dans le sujet, vous avez bien rédigé ladite récurrence, les questions précédentes ont donné l'impression que vous étiez quelqu'un de sérieux. Si vous pensez qu'il peut y avoir un doute sur l'un de ces points, prenez la peine de rédiger la récurrence.

$$= \frac{1}{3\times 2^n}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 2^n & n\\ 2(-1)^n & -(-1)^n & -(-1)^n\\ -(-1)^n & 2(-1)^n & -(-1)^n\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3\times 2^n}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad A^n = \frac{1}{3\times 2^n}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n\end{pmatrix}}$$

3. Notons $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}$. On a alors, pour $n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

**Terminologie**

Attention, une telle suite ne s'appelle pas une suite géométrique de raison $A$. il n'existe pas de « suites géométriques matricielles ».

On ne déduit qu'alors $X_n = A^nX_0$

Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix} = \frac{1}{3\times 2^n}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3\times 2^n}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n\\ 2^n-(-1)^n\end{pmatrix}$$

D'où

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \begin{cases} a_n &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\\ b_n &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\\ c_n &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\end{cases}}$$

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que l'on a bien $a_n+b_n+c_n = 1$.